拓扑学综合练习

一、填充练习题

1、设 A 为离散空间 X 的子集，那么 A°=(　　).

2、设 A 度量空间(X, ρ)的子集，若 $x\in X$, $\rho(x, A)>0$, 则准确表示 x 与 A 的关系的式子是 $x\in$(　　).

3、设 A 度量空间(x, ρ)的子集，若 $x\in X$, $\rho(x, A')>0$, 则 x 是 A 的(　)点.

4、拓扑空间 X 的每一个有限集(单点集)是闭集当且仅当 X 是(　　)空间.

5、拓扑空间 X 是 T_1 的当且仅当(　　　　　　　　　　　　　　　　).

6、设 X 为拓扑空间, A 为 X 的子集, $x\in X$, 如果(　　　　　　　　　　　), 则称 x 是 A 的凝聚点.

7、点集拓扑学的中心任务是研究(　　　　　　).

8、对于拓扑空间(X, T)的一个子空间(Y, Σ), T与Σ满足关系(　　　).

9、设 X 为满足第一可数公理的拓扑空间，那么每一个 $x\in X$ 有邻域基具有如下特点: (　　　　　　　　　　　　　　　　　　).

10、设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 为拓扑空间 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的积空间, $X\neq\varnothing$, X 是紧致拓扑空间，则每一个 X_j 为(　　)空间.

11、任何一族连通空间的积空间都是(　　　)空间.

12、一个拓扑空间的可分性定义为: (　　　　　　　　　　　　　　　　).

13、设 X 为拓扑空间, D 是 X 的子集且 $D^{-}=X$, 则称 D 为 X 的一个(　　)子集.

14、可分度量空间的每一个子空间都是(　　)空间.

15、在(　　　　　　)空间中，一个子集 B 是闭集的充分必要条件是: B 为紧致集.

16、一个拓扑空间(X, T), 如果(　　　　　　　　　　　　　　　　), 就称为满足第二可数公理的空间.

17、设 X 为拓扑空间, 如果存在(   ), 则称集合 W 是点 $x\in X$ 的一个邻域.

18、仅含有有限个点的拓扑空间是可度量化的空间当且仅当它是(   )空间.

19、设 Y 是拓扑空间, $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 为拓扑空间 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 的积空间, $p_j:X\to X_j$ 是投射, 则映射 $f:Y\to X$ 为连续映射当且仅当对于每一个 $j=1,2,\cdots,n$, 复合映射 $p_j{}^o f:Y\to X_j$ 为(   ).

20、拓扑空间 X 是局部连通的充分必要条件是 X 的任何一个开集的任何一个连通分支都是(   ).

21、给出 $\mathbb{R}^n$ 的一个可数基如下: (   ).

22、设 X 为拓扑空间, A 是 X 的子集满足 $A\subset A^\circ$ 的充分必要条件是(   ).

23、称拓扑空间的某种性质 P 具有遗传性指的是: (   ).

24、设集合 X=｛a,b｝, 其中 a, b 是两个不同的元素. 给出 X 上的一个拓扑, 要求它不是 X 上的平庸拓扑, 也不是 X 上的离散拓扑: (   ).

25、一个拓扑空间的正则性定义为: (   ).

二、选择练习题

1、设 $f:X\to Y$, $A, B\subset Y$, 则下面不正确的命题是(   ).

(A) $A=f(f^{-1}(A))$.

(B) $f^{-1}=(A\cap B)= f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

(C) $f^{-1}(A-B)= f^{-1}(A)- f^{-1}(B)$.

(D) $f^{-1}(A\cup B)= f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

2、设 Σ 和 T 是集合 X 上的两个不同的拓扑, 则下面不正确的命题是(   ).

(A) $T\cap\Sigma$ 仍然是 X 上的拓扑.

(B) $T\cup\Sigma$ 仍然是 X 上的拓扑.

(C) 假定Ω是 X 上的离散拓扑，则$T\subset\Omega$.

(D) 假定Θ是 X 上的平庸拓扑，则$\Theta\subset\Sigma$.

3、拓扑空间是局部连通，下面不正确的命题是(　　).

(A) X 是一个连通空间.

(B) X 的任一子空间是连通的子空间.

(C) X 有一个基，其每一个成员都是连通的.

(D) X 的任一开集的任一连通分支都是开集.

4、设集合 X={0, 1, 2}. 那么下面不是 X 上的拓扑的集族是(　　).

(A) {{1}, {1, 2}, ∅, X}.　　　　(B) {{0}, ∅, X}.

(C) {{2}, {2, 0}, {0, 1}, ∅, X}.　　(D) {∅, {1}, {1, 2}, {1, 2, 0}}.

5、设 X 为拓扑空间，下面不正确的命题是(　　).

(A) 若 X 是第二可数的，则 X 是第一可数的.

(B) 若 X 是第二可数的，则 X 是可分的.

(C) 若 X 是可分的度量空间，则 X 是 Lindelöf 的.

(D) 若 X 是 Lindelöf 的空间，则 X 是可分的.

6、对任意集合 X, Y, Z, 下面命题正确的是(　).

(A) 若 cardX⩽cardY, 则 X 是 Y 的子集.

(B) 若 X 是 Y 的子集，则 cardX⩽cardY.

(C) 若 X 是 Y 的子集，则 cardX<cardY.

(D) 若 X≠Y, 则 cardX≠cardY.

7、设 X 为拓扑空间，下面正确的命题是(　).

(A) 若 X 是正规空间，则 X 是 T_1 空间.

(B) 若 X 是 T_0 空间且正则，则 X 是 T_1 空间.

(C) 若 X 是正则空间，则 X 是 T_1 空间.

(D) 若 X 是完全正则空间，则 X 是 T_1 空间.

8、以下性质(　　)关于开子空间不是可遗传的.

(A) 可分性质.

(B) Lindelöf 性质.

(C) 满足第一可数性公理.

(D) 满足第二可数性公理.

9、设(X, T), (Y, Σ)为拓扑空间，关于 X × Y 的积拓扑M, p_1, p_2 分别是 X × Y 到 X 和 Y 的投射，则下面不正确的命题是(   ).

(A) $\{P\times Q \mid P\in T, Q\in\Sigma\}$是积拓扑M的一个基.

(B) $\{P\times Q \mid P\in T, Q\in\Sigma\}$是积拓扑M的一个子基.

(C) $\{p_1^{-1}(P) \mid P\in T\}\cup\{p_2^{-1}(Q) \mid Q\in\Sigma\}$是积拓扑M的一个基.

(D) $\{p_1^{-1}(P) \mid P\in T\}\cup\{p_2^{-1}(Q) \mid Q\in\Sigma\}$是积拓扑M的一个子基.

10、设 X 为拓扑空间, ℝ为实数空间，则 $f:X\to\mathbb{R}$为连续映射的充分必要条件是(   ).

(A) 对任意实数 a, b, $\{x\in X \mid b<f(x)<a\}$是 X 的开集.

(B) 对任意实数 a，集合$\{x\in X \mid f(x)\neq a\}$为 X 的开集.

(C) 对任意实数 a，集合$\{x\in X \mid f(x)<a\}$为 X 的开集.

(D) 对任意实数 a, b, $\{x\in X \mid b\leqslant f(x)\leqslant a\}$是 X 的闭集.

11、设ℝ为通常实数空间，则下面不正确的命题是(   ).

(A) ℝ为第二可数拓扑空间.

(B) ℝ为可分拓扑空间.

(C) ℝ为紧致拓扑空间.

(D) ℝ为连通拓扑空间.

12、设 X 为拓扑空间, $B\subset A\subset X$，则下面不正确的命题是(   ).

(A) $d(B)\subset d(A)$. (B) $B^\circ\subset A^\circ$.

(C) $B'\subset A'$.

(D) $B^-\subset A^-$.

13、设 X 为含有无数个元素的集合，则下面不正确的命题是(   ).

(A)只能通过定义开集的办法来建立拓扑.

(B)X 上可以先定义闭集全体来建立拓扑.

(C)X 上可以先定义邻域全体来建立拓扑.

(D)除上述三种办法外，还有别的办法可以建立拓扑.

14、设 X 为拓扑空间，下面不正确的命题是( ).

(A) ϕ 的闭包仍然是 ϕ. (B) X 的闭包仍然是 X.

(C) $(A\cap B)^{-}=A^{-}\cap B^{-}$. (D) $(A\cup B)^{-}=A^{-}\cup B^{-}$.

15、设 X 为拓扑空间，$\{x_k\}$是 X 中的收敛序列，则下面正确的命题是( ).

(A)对于任何拓扑空间 X, $\{x_k\}$ 的极限唯一.

(B)若 X 是 Hausdorff 空间，则$\{x_k\}$ 的极限唯一.

(C)若 X 是第一可数的，则$\{x_k\}$ 的极限唯一.

(D)若 X 是正则的空间，则$\{x_k\}$的极限唯一.

16、设 X 为拓扑空间，下面不正确的命题是( ).

(A)若 X 是正规空间，则 X 是 T_1 空间.

(B)若 X 是 T_0 空间且正则，则 X 是 T_1 空间.

(C)若 X 是 T_3 空间，则 X 是正则 T_1 空间.

(D)若 X 是 T_4 空间，则 X 是完全正则空间.

17、设 X 为拓扑空间, A 是 X 的子集，下面不正确的命题是( ).

(A)若 A 是紧致的，则 A 是列紧的.

(B)若 A 是可数紧致的，则 A 是列紧的.

(C)若 A 是序列紧致的，则 A 是可数紧致的.

(D)若 A 是列紧的 Lindelöf 空间，则 A 是紧致的.

(E)A 是列紧致的当且仅当 A 是序列紧致的.

18、设(X, T), (Y, S)为拓扑空间，关于 $X\times Y$ 的积拓扑 M，下面不正确的命题是( ).

(A) $\{P\times Q: P\in T, Q\in S\}$是积拓扑 M 的一个基.

(B) 若 $C\in T, D\in S$, 则 $C\times D\in M$.

(C) 对积拓扑 M 中每一个元素 W, 都存在 $C\in T, D\in S$, 使得 $W=C\times D$.

(D) 对积拓扑 M 中每一元素 V, 都存在 $C\in T, D\in S$, 使得 $V\supset C\times D$.

三、反例论证题

1、举例说明存在这样的一个集合 X 和 X 上的两个拓扑 T, S, 使得 $S\cup T$ 不是 X 上的一个拓扑.

2、举例论证存在不是 T_2 空间的 T_1 空间.

3、举例并论证连通空间未必是局部连通的.

4、举例说明存在这样的拓扑空间 X, X 有一个子集 A, A 的边界以 A 为子集. 并就您的例子回答: A 的内部、闭包、外部(闭包的余集)各是什么.

5、举例说明存在这样的正规的拓扑空间 X, X 中的序列$\{x_k\}$收敛, 但极限不唯一.

6、举例说明存在这样的拓扑空间 X, 它是正规的但不是 T_0 空间.

7、说明存在这样的拓扑空间 X, X 是 Lindelöf 的度量空间, 但不是紧致空间.

8、举例说明存在这样的 T_1 拓扑空间 X, X 中的序列$\{x_k\}$收敛, 但极限不唯一.

四、证明或问答题

(1)叙述度量的定义.

(2)证明: 若 X 是 T_3 空间, 则 X 是 T_2 空间.

(3)证明: 在一维实数空间$\mathbb{R}$的子空间 [0,5)中, [0,2) 是开集.

(4)证明 n 维实数空间$\mathbb{R}^n$的每一个子空间都是可分空间.

(5)证明 n 维实数空间$\mathbb{R}^n$的每一个子空间都是 Lindelöf 空间.

(6)设 X 为拓扑空间, A 为 X 的子集. 证明: x 为 A 的凝聚点当且仅当 x 为 $A-\{x\}$ 的凝聚点.

(7)设 X 为拓扑空间, A 为 X 的子集. 证明: $(A^-)^-=A^-$.

(8)叙述 Tietze 扩张定理.

(9)若 X 是离散空间, X 中序列$\{x_k\}$收敛, 则存在自然数 N, 使得当 $k,n>N$ 时,

$x_k=x_n$.

(10)设 X 为拓扑空间, A, B 为 X 的子集. 证明: $(A\cap B)^0=A^0\cap B^0$.

(11)证明: 每一个度量空间都满足第一可数性公理.

(12)叙述 Urysohn 引理, 并指出它的应用的一个简单例子(只指出可用于证明的命题, 不必给出证明).

(13)设 X 为拓扑空间, A 为 X 的子集. 证明: A 为闭集的充分必要条件是 $A=A^-$.

(14)设 X={1, 2, 3}. T={ϕ, {1}, {2}, {1, 2}, X}. 验证(X, T)是拓扑空间, 但不是正则的.

(15)证明度量空间是 T_2 空间.

(16)叙述拓扑空间中子基与基的关系.

(17)设 X 为拓扑空间, A, B 为 X 的子集. 证明: 若 A 的导集 $d(A)\subset B\subset A$, 则 B 为闭集.

(18)设 $f:X\to Y$, $A,B\subset Y$, 则有 $f^{-1}(A\cup B)= f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

(19)设 X, Y 为度量空间, 如何用 $\varepsilon-\delta$ 语言描述映射 $f:X\to Y$ 在点 $a\in X$ 连续?

五、证明练习题

(1)设 X, Y 为拓扑空间, 映射 $f: X\to Y$ 在点 $x_0\in X$ 连续等价于, f(x)有一个邻域子基 M_y, 使得对于任何 $U\in M_y$, 原象 $f^{-1}(U)$是 x_0 的一个邻域. 请证明.

(2)证明: 设 X, Y 为拓扑空间, 映射 $g: X\to Y$ 在点 $x\in X$ 连续等价于, f(x)有一个邻域基 W_y, 使得对于任何 $U\in W_y$, 原象 $g^{-1}(U)$是 x 的一个邻域.

(3)设 X, Y 为拓扑空间, 映射 $f: X\to Y$ 在 X 连续等价于, Y 有一个基 $\mathcal{B}$, 使得对于任何 $U\in\mathcal{B}$, 原象 $f^{-1}(U)$都是 X 的一个开集.

(4)设 X, Y 为拓扑空间, 映射 $f: X\to Y$ 在 X 连续等价于, Y 有一个子基 $\mathcal{S}$, 使得对于任何 $U\in\mathcal{S}$, 原象 $f^{-1}(U)$都是 X 的一个开集. 请证明.

(5)设 X, Y 为度量空间, 映射 $g: X\to Y$ 在点 $a\in X$ 连续等价于, 对任意开球

$B=\{y\in Y:\rho(y, f(a))<1/n\}$，原象 $g^{-1}(B)$是 a 的一个邻域.

(6)设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 为拓扑空间 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的积空间，则每一个投射 $p_j:X\to X_j$ 都是满的连续开映射, $j=1,\cdots, n$.

(7)证明：若 X, Y 为拓扑空间, X 满足第二可数性公理，存在满的连续开映射 $f:X\to Y$，则 Y 也满足第二可数性公理.

(8)证明满足第二可数公理的空间必定为可分空间.

(9)证明每一个正则的 T_0 空间都是 T_3 空间.

(10)证明：每一个完全正则空间都是正则空间.

(11)证明: X 为 T_1 拓扑空间的充分必要条件是 X 的每一个单点集都是闭集.

(12)证明: Hausdorff 空间中每一个紧致子集都是闭集.

(13)证明：设 X 为 Hausdorff 空间，A, B 为 X 的不相交的紧致子集，则 A, B 分别有开邻域 U, V 使得 U 与 V 不相交.

(14)证明：设(X, ρ)为度量空间，A, B 为 X 的紧致子集. 证明存在 $x_0\in A$, $y_0\in B$ 使得 $\rho(A, B)=\rho(x_0,y_0)$，并且若 A, B 为不相交，则 $\rho(A, B)>0$.